PARAGRAAF 10.1 : VECTOREN EN LIJNEN

LES 1 : VECTOREN TEKENEN

DEFINITIES

- Vector $x = \binom{a}{b}$ wil zeggen a naar rechts en b omhoog.

Je kunt vectoren tekenen en berekenen. We doen dat aan de hand van een voorbeeld.

VOORBEELD1

Neem de vectoren $v = \binom{1}{2}$ en w = $\binom{3}{1}$

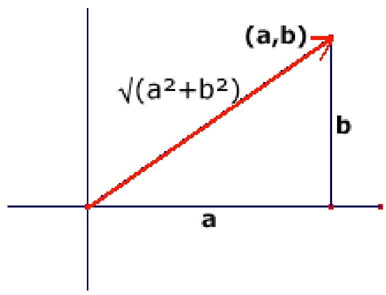
a. Bereken en teken de lengte van v.
b. Teken en bereken *v* + *w* en *v* +2*w*
c. Teken en bereken v - w.

OPLOSSING1

a. Lengte van vector x $\rightarrow |x| = \sqrt{a^2 + b^2} =$

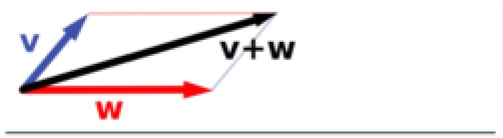
(i) Tekenen geeft

(ii) $x = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$



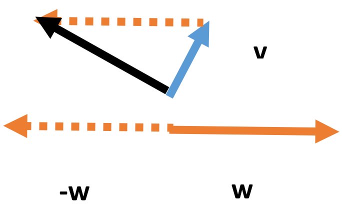
b. (i) Tekenen geeft

(ii) $v + w = \binom{4}{-1}$ en $v + 2w = \binom{1}{2} + 2\binom{3}{1} = \binom{7}{4}$



c. (i) Tekenen geeft

(ii) $v - w = \binom{1}{2} - \binom{3}{1} = \binom{-2}{1}$



LES 2 : VECTORVOORSTELLING

DEFINITIES BIJ EEN VECTORVOORSTELLING:

- Vectorvoorstelling = { vergelijking van de lijn uitgedrukt in vectoren }
- r = richtingsvector
- Vectorvoorstelling = steunvector + α · richtingsvector
- Vectorvoorstelling = A + α · (B – A)

VOORBEELD 1

Neem de punten V = $\binom{1}{-2}$ en W = $\binom{3}{1}$

a. Stel een vectorvoorstelling op van de lijn *l* door V en W.
b. Bepaal het snijpunt van lijn *l* met de y-as.
c. Stel een vergelijking op van lijn *l*.

OPLOSSING 1

a. Steunvector = w = $\binom{3}{1}$

Richtingsvector = V – W = $\binom{1}{-2} - \binom{3}{1} = \binom{-2}{-3}$

Vectorvoorstelling: *l* = W + α (V – W) = $\binom{3}{1} + \alpha\binom{-2}{-3} = \binom{3-2\alpha}{1-3\alpha}$

b. Snijpunt y-as, dan is de x = 0 → $\binom{3-2\alpha}{1-3\alpha} = \binom{0}{\ldots}$

3 - 2α = 0 → α = 1,5 → $\begin{pmatrix} 3-2\cdot 1\frac{1}{2} \\ 1-3\cdot 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c. Dit kan op drie manieren :

(1) STELSEL

$$\begin{cases} x = 3 - 2\alpha \\ y = 1 - 3\alpha \end{cases} \begin{vmatrix} \times 3 \\ \times -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x = 9 - 6\alpha \\ -2y = -2 + 6\alpha \end{cases} +$$

$3x - 2y = 7$

(2) SCHRIJF ALS $\alpha =$

$x = 3 - 2\alpha \rightarrow 2\alpha = 3 - x \rightarrow \alpha = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$

Invullen in $y = 1 - 3\alpha$ geeft :

$y = 1 - 3\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x\right) = 1 - \frac{9}{2} + 1\frac{1}{2}x$

$y = -3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}x$

$-1\frac{1}{2}x + y = -3\frac{1}{2}$

$3x - 2y = 7$

(3) MET DE NORMAALVECTOR

$r_l = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow n_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Dus $3x - 2y = c$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ invullen geeft $3 \cdot 1 - 2 \cdot -2 = 7 = c$

Dus $3x - 2y = 7$

PARAGRAAF 10.2 : AFSTANDEN BIJ LIJNEN EN CIRKELS

LES 1 AFSTAND PUNT TOT LIJN

DEFINITIE AFSTAND PUNT TOT LIJN

- Gegeven punt $P = (x\,, y)$ en lijn $k :\ ax\ +\ by\ =\ c$.
- Dan geldt dat de afstand van punt P tot lijn k geldt : $d(P,k) = \frac{|ax_p+by_p-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

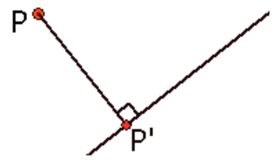
VOORBEELD 1

Gegeven zijn lijn $k :\ 3x\ + 4y\ =\ 5$ en het punt $P\ =\ (2\,,4)$.

a. Bepaal de afstand van lijn k tot P.
b. Bepaal alle lijnen die op afstand 2 van lijn k liggen.
c. Bepaal alle lijnen die door P gaan en op afstand 2 van punt $Q\ =\ (-1\,,5)$ liggen.

OPLOSSING 1

a. Er zijn twee manieren



A. “Old School”

(1) Lijn als y = schrijven : $4y = -3x + 5$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

(2) $RC_{PP'} \times -\frac{3}{4} = -1\ dus\ RC_{PP'} = \frac{4}{3}$

(3) $y = \frac{4}{3}x + b.$

$Vul\ punt\ P\ in :\ 4\ = \frac{4}{3} \cdot 2 + b\ \ \rightarrow b = \frac{4}{3}$

(4) P’ is snijpunt van $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}\ \ en\ y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$.

(5) Daarna afstand PP’ berekenen.

B. Met de formule

$$d(P,k) = \frac{|3\cdot 2+4\cdot 4-5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|17|}{\sqrt{25}} = \frac{17}{5} = 3,4$$

b. Voor alle punten R=(x,y) op deze lijnen geldt :

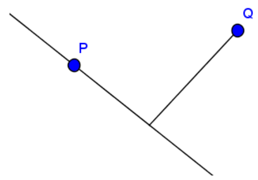
$$d(k\,,R) = \frac{|3x+4y-5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3x+4y-5|}{5} = 2$$

$$|3x+4y-5| = 10$$

$$3x + 4y - 5 = 10 \;\; v \;\; 3x + 4y - 5 = -10$$

$$\mathbf{3x + 4y = 15 \quad v \;\; 3x + 4y = -5}$$

c. Eerst een plaatje. Noem de lijn door P lijn m :



(1) De vergelijking van lijn m is y = ax + b. Je weet dat P = (2 , 4) erop ligt:

$4 = a \cdot 2 + b \rightarrow b = 4 - 2a$

Dus $y = ax + 4 - 2a \;\; \rightarrow \;\; ax - y + 4 - 2a = 0$

(2) De afstand van Q tot m bepalen

$$d(Q,m) = \frac{|-a-5+4-2a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{|-3a-1|}{\sqrt{a^2+1}} = 2$$

Dit geeft :

$$|-3a-1| = 2\sqrt{a^2+1}$$

$$9a^2 + 6a + 1 = 4(a^2+1)$$

$$9a^2 + 6a + 1 = 4a^2 + 4$$

$$5a^2 + 6a - 3 = 0$$

Oplossen :

$$D = 6^2 - 4 \cdot 5 \cdot -3 = 96 \rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

$$a = \frac{-6+4\sqrt{6}}{10} = -0{,}6 + 0{,}4\sqrt{6} \;\; of \;\; a = -0{,}6 - 0{,}4\sqrt{6}$$

(3) Vul de a in in de vergelijking $y = ax + 4 - 2a$:

$$y = (-0{,}6 + 0{,}4\sqrt{6})x + 4 - 2(-0{,}6 + 0{,}4\sqrt{6})$$
$$y = (-0{,}6 + 0{,}4\sqrt{6})x + 5{,}2 - 0{,}8\sqrt{6}$$

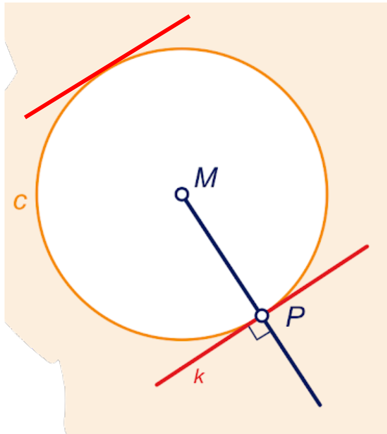
Of

$$y = (-0{,}6 - 0{,}4\sqrt{6})x + 4 - 2(-0{,}6 - 0{,}4\sqrt{6})$$
$$y = (-0{,}6 - 0{,}4\sqrt{6})x + 5{,}2 + 0{,}8\sqrt{6}$$

OPMERKING

Je kunt dit ook oplossen via $RC_l \times RC_m = -1$

LES 2 RAAKLIJNEN AAN CIRKELS



VOORBEELD 1

Gegeven is de cirkel met vergelijking de $x^2 + y^2 + 2x - 3y = 8$.

Bepaal de vergelijking van de raaklijnen als de rc = 2.

OPLOSSING 1

(1) EERST EEN PLAATJE MAKEN.

Er kunnen twee raaklijnen zijn die de vorm y = 2x + b hebben. We moeten alle waarden van b gaan berekenen.

(2) DE STRAAL EN HET MIDDELPUNT BEPALEN.

$$(x+1)^2 - 1 + \left(y - 1\tfrac{1}{2}\right)^2 - 2\tfrac{1}{4} = 8$$

$$(x+1)^2 + \left(y - 1\tfrac{1}{2}\right)^2 = 11\tfrac{1}{4} = r^2$$

$$M = \left(-1, 1\tfrac{1}{2}\right) \; en \; r = \sqrt{\frac{45}{4}}$$

Je kunt nu op drie manieren de waarden van b bereken :

(3.1) MET DE FORMULE $d(M,k) = r$

De lijn $y = 2x + b$ omschrijven tot $y - 2x - b = 0$ en dan invullen geeft :

$$d(M,k) = \frac{\left|1\frac{1}{2} - 2 \cdot -1 - b\right|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \sqrt{\frac{45}{4}}$$

KV GEEFT : $\left|3\tfrac{1}{2} - b\right| = \sqrt{\frac{45}{4}}\sqrt{4+1}$

$$3\tfrac{1}{2} - b = \sqrt{56\tfrac{1}{4}} \quad v \quad 3\tfrac{1}{2} - b = -\sqrt{56\tfrac{1}{4}}$$

$$3\tfrac{1}{2} - b = 7\tfrac{1}{2} \quad v \quad 3\tfrac{1}{2} - b = -7\tfrac{1}{2}$$

$$-b = 4 \quad v \quad -b = -11$$

$$b = -4 \quad v \quad b = 11$$

Dus de lijnen zijn $y = 2x + 11 \;\; v \;\; y = 2x - 4$

(3.2) MET DE FORMULE $RC_k \times RC_{MP} = -1$

1. ***Eerst lijn MP opstellen***

   $2 \times RC_{MP} = -1 \;\rightarrow\; RC_{MP} = -\frac{1}{2}$

   Dus lijn MP : $y = -\frac{1}{2}x + b$. Vul punt M in :

$$1\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot -1 + b$$
$$b = 1$$

   Dus $y = -\frac{1}{2}x + 1$

2. ***Lijn MP invullen in de cirkelvergelijking.***

   Dit geeft :
$$(x+1)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}x + 1 - 1\tfrac{1}{2}\right)^2 = 11\tfrac{1}{4}$$
$$(x+1)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\right)^2 = 11\tfrac{1}{4}$$
$$x^2 + 2x + 1 + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4} = 11\tfrac{1}{4} \quad (\times 4)$$
$$4x^2 + 8x + 4 + x^2 + 2x + 1 = 45$$
$$5x^2 + 10x - 40 = 0$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(x-2)(x+4) = 0$$
$$x = 2 \;\; v \;\; x = -4$$

   Invullen in $y = -\frac{1}{2}x + 1$ geeft de punten $\mathrm{R} = (2{,}0)$en $\mathrm{P} = (-4{,}3)$

3. ***Punten R en P invullen in $y = 2x + b$.***

   $\mathrm{R} = (2{,}0)$ invullen $\quad 0 = 2 \cdot 2 + \mathrm{b}$

   $b = -4$

   $\mathrm{P} = (-4{,}3)$ invullen $\quad 3 = 2 \cdot -4 + \mathrm{b}$

   $b = 11$

(3.3) RAAKPUNT BETEKENT $\boldsymbol{D = 0}$

De lijn $y = 2x + b$ invullen in de cirkelvergelijking geeft :

Dit geeft :

$$(x+1)^2 + \left(2x + b - 1\tfrac{1}{2}\right)^2 = 11\tfrac{1}{4}$$

$$x^2 + 2x + 1 + (2x+b)^2 + 2 \cdot -1\tfrac{1}{2}(2x+b) + 2\tfrac{1}{4} = 11\tfrac{1}{4}$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4x^2 + 4bx + b^2 - 6x - 3b = 9$$

$$5x^2 + (4b-4)x + +b^2 - 3b - 8 = 0$$

Omdat ze raken is er maar 1 oplossing, dus $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$:

$$D = (4b-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 3b - 8) = 0$$

$$D = 16b^2 - 32b + 16 - 20b^2 + 60b + 160 = 0$$

$$-4b^2 + 28b + 176 = 0$$

$$b^2 - 7b + 44 = 0$$

$$(b-11)(b+4) = 0$$

$$b = 11 \ \ v \ \ b = -4$$

PARAGRAAF 10.3 : VECTOREN EN HOEKEN

LES 1 : INPRODUCT EN HOEKEN

DEFINITIES

(1) Het **inproduct** van de vectoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ is gedefinieerd als

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

(2) De **hoek α** tussen twee vectoren a en b is gedefinieerd als

$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$ met $0 \leq \ \alpha \ \leq 90$

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de vectoren $a = \binom{3}{2}$ en $b = \binom{5}{1}$

a. Bereken het inproduct van a en b.

b. Bereken de hoek tussen de vectoren a en b.

Gegeven zijn ook de lijnen $l_1: \binom{x}{y} = \binom{0}{3} + \lambda\binom{1}{1}$ en $l_2: \binom{x}{y} = \binom{8}{9} + \mu\binom{2}{-3}$

c. Bereken de hoek tussen de lijnen l_1 en l_2.

OPLOSSING 1

a. $a \cdot b = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 17$

b. $|a| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\ en\ |b| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{17}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = 0{,}9246\ldots$$

α = 22

c. De hoek tussen de twee lijnen wordt bepaald door de richtingsvectoren !!!

$r_1 \cdot r_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot -3 = -1$

$|r_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ en\ |r_2| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}} = -0{,}196\ldots$$

α = 101

Omdat α > 90 geldt dat de hoek = 180 – α = 180 -101 = 79

LES 2 : NORMAALVECTOR EN VERGELIJKING VAN EEN LIJN

INPRODUCT EN NORMAALVECTOR

(1) Als twee vectoren loodrecht op elkaar staan, dan is het inproduct nul

(2) Dit kun je zien aan de formule voor de hoek :

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot n}{|a||n|} = \frac{0}{|a||n|} = 0 \quad \rightarrow \alpha = 90$$

(3) Normaalvector (n) = { een vector die loodrecht staat op een andere vector }

DE NORMAALVECTOR

(1) De normaalvector n_v staat loodrecht op de richtingsvector r_v

(2) Truc bepalen normaalvector van $v = \binom{a}{b} \rightarrow n_v = \binom{-b}{a}$ $of\ n = \binom{b}{-a}$

(3) Als de normaalvector $n_v = \binom{-b}{a}$ dan is de vergelijking van de lijn $-bx + ay = c$

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de punten $A = \binom{3}{2}$ en $B = \binom{5}{1}$. Lijn k gaat door de punten A en B.

a. Bepaal een vectorvoorstelling van lijn *k*.

b. Bepaal de vergelijking van de lijn *k* (ax + by = c)

c. Bepaal de normaalvector van deze lijn k. Wat valt je op ?

OPLOSSING 1

a. $r_{BA} = A - B = \binom{3-5}{2-1} = \binom{-2}{1}$ en $B = \binom{5}{1}$

lijn l_1: $\binom{x}{y} = \binom{5}{1} + \lambda\binom{-2}{1}$

b. $rc = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-2}{5-3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + b\ en\ punt\ (5{,}1)$

$1 = -\frac{1}{2} \cdot 5 + b \qquad \rightarrow b = 3\frac{1}{2}$

Dus $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \frac{1}{2}x + y = 3\frac{1}{2} \;\rightarrow\; x + 2y = 7$

c. $n = \binom{1}{2}$ (of een veelvoud daarvan). Dit zijn de getallen die staan bij de lijn van b.

VOORBEELD 2

Gegeven is de lijn m : $\binom{x}{y} = \binom{5}{1} + \alpha\binom{-1}{4}$.

a. Bepaal de vergelijking van lijn m.

b. Lijn p staat loodrecht op lijn m en gaat door het punt $T = (7,2)$. Bepaal de vergelijking van lijn p.

Gegeven is ook lijn l : $\binom{x}{y} = \binom{7}{9} + \mu\binom{2}{-3}$

c. Bepaal het snijpunt van deze lijn p en lijn l.

OPLOSSING 2

a. **(1)** $n = \binom{4}{1}$ dus ax + by = c $\rightarrow$ $4x + y = c$

(2) Punt $(5,1)$ $\rightarrow$ $4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = c$
$\rightarrow$ $c = 22$

(3) Dus $\rightarrow$ $4x + y = 22$

b. $r_m = \binom{-1}{4}$ en lijn p staat daar loodrecht op. Dus $r_p = \binom{4}{1}$.

Dan is de normaalvector van p gelijk aan $n_p = \binom{-1}{4}$

Dus $-x + 4y = c$.

Punt T invullen geeft $-7 + 4 \cdot 2 = 1 = c$

Dus $-x + 4y = 1$

c. $x = 7 + 2\mu \;\; en\; y = 9 - 3\mu$. Deze kun je invullen in $-x + 4y = 1$. Dit geeft :

$$-7 - 2\mu + 4(9 - 3\mu) = 1$$
$$-7 - 2\mu + 36 - 12\mu = 1$$
$$-14\mu = -28$$
$$\mu = 2$$

Dit geeft $\binom{x}{y} = \binom{7}{9} + 2\binom{2}{-3} = \binom{11}{3} = S$

PARAGRAAF 10.4 : VECTOREN EN ROTATIES

DEFINITIE ROTATIE

(1) De richtingsvector als je loopt van A naar B is :
$r = eindpunt - startpunt = B - A$

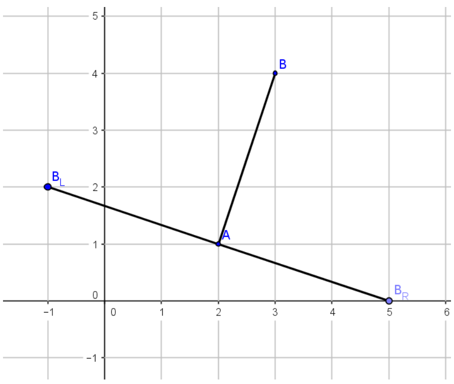
(2) Als de richtingsvector $r = \binom{a}{b}$ dan is :

- $r = \binom{-b}{a}$ de vector die 90 graden naar links draait (dan wordt de x negatief)
- $r = \binom{b}{-a}$ de vector die 90 graden naar rechts draait (dan wordt de y negatief)

VOORBEELD 1

Gegeven is de vector $AB = B - A = \binom{3}{4} - \binom{2}{1} = \binom{1}{3}$

Bepaal de vectoren AB_R en AB_L en leg uit wat dit voor de draaiingshoek betekent.



OPLOSSING 1

(1) Draai 90 graden naar rechts : $AB_R = B_R - A = \binom{5}{0} - \binom{2}{1} = \binom{3}{-1} = \binom{b}{-a}$

(2) Draai 90 graden naar links : $AB_L = B_L - A = \binom{-1}{2} - \binom{2}{1} = \binom{-3}{1} = \binom{-b}{a}$

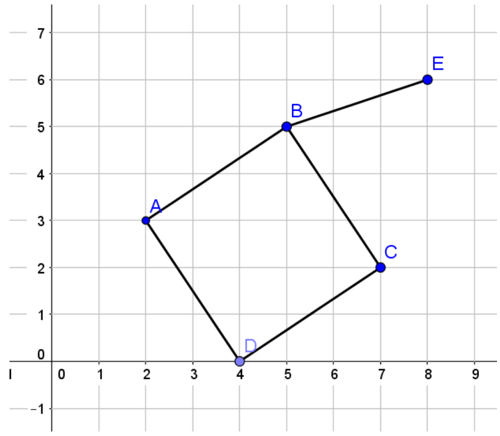
VOORBEELD 2

Gegeven is het ABCD, met D = (4,0) en B = (5,5).

a. Bereken de coördinaten van punt C.

De lijn BE is de diagonaal van vierkant BPEQ met $y_Q > 5$. Punt E = (8,6)

b. Bepaal de lengte van de zijde van vierkant BPEQ.



OPLOSSING 2

a. Aanpak : Bepaal eerst het midden M en bepaal daarna de richting vanuit punt M om in C te komen.

(1) $M = \frac{1}{2}\left(\binom{5}{5} + \binom{4}{0}\right) = \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2) Bepaal de richting van BD : $r_{BD} = B - D = \binom{5}{5} - \binom{4}{0} = \binom{1}{5}$

(3) $r_{BD} \perp r_{AC} \rightarrow r_{AC} = \binom{5}{-1}$ { je wil naar rechts draaien dus $r = \binom{b}{-a}$ }

(4) $C = M + \frac{1}{2} r_{AC} = \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\binom{5}{-1} = \binom{7}{2}$

LET OP : Als je bij $r_{AC} = \binom{-5}{1}$ moet je om C te berekenen $M - \frac{1}{2} r_{AC}$ doen !!!!

b. Aanpak : Bepaal eerst het midden N en Q waarmee je de lengte kunt berekenen.

(1) $N = \frac{1}{2}\left(\binom{5}{5} + \binom{8}{6}\right) = \begin{pmatrix} 6\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2) Bepaal de richting van BE : $r_{BE} = E - B = \binom{8}{6} - \binom{5}{5} = \binom{3}{1}$

(3) $r_{BD} \perp r_{PQ} \rightarrow r_{PQ} = \binom{-1}{3}$ { je wil naar links draaien dus $r = \binom{-b}{a}$ }

(4) $Q = N + \frac{1}{2} r_{AC} = \begin{pmatrix} 6\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\binom{-1}{3} = \binom{6}{7}$

(5) $|QE| = \sqrt{(6-5)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{5}$

Opm : Dit had ook véél sneller gekund $|QE| = \frac{|BE|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(6-5)^2+(8-5)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$

PARAGRAAF 10.6 : SNELHEID EN VERSNELLING

DEFINITIES

(1) Kromme = { Formule waarbij de x- en de y-coördinaat afhangt van een 3e variabele t }

VOORBEELDKROMME : $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 10-2t \end{pmatrix}$

(2) Een aantal vectoren

(2.1) Plaatsvector $r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 10-2t \end{pmatrix}$

(2.2) Snelheidsvector $v(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2 \end{pmatrix}$

(2.3) Versnellingsvector $a(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) Lengte / Grootte van de vector

(3.1) Lengte (plaatsvector) $|r| = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}$

(3.2) (Baan)snelheid $|v| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

(3.3) (Baan)versnelling $a_b(t) = \frac{v \cdot a}{|v|}$

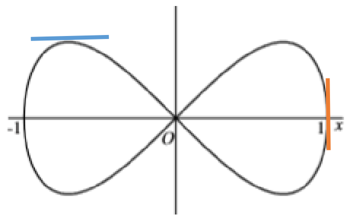
(4) Raaklijnen / Keerpunten

(4.1) Helling $rc = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

(4.2) Horizontale raaklijn $x'(t) \neq 0 \ \ en \ \ y'(t) = 0$

(4.3) Verticale raaklijn $x'(t) = 0 \ \ en \ \ y'(t) \neq 0$

(4.4) Keerpunt $x'(t) = 0 \ \ en \ \ y'(t) = 0$



(5) Hoek snijpunt met zichzelf (Stel op $t = 2 \ en \ t = 5$)

(5.1) $\tan(\alpha) = \frac{y'(2)}{x'(2)} \quad \rightarrow \alpha = \cdots$

(5.2) $\tan(\beta) = \frac{y'(5)}{x'(5)} \quad \rightarrow \beta = \cdots$

(5.3) $Hoek \ \varphi = \alpha - \beta$

VOORBEELD 1

Gegeven is de kromme $\begin{cases} x = t^2 - 4 \\ y = 3t - t^2 \end{cases}$.

a. Plot de kromme op de GR
b. Bereken de snijpunten met de y-as.
c. Bereken de snelheid op t = 1.
d. Bereken de punten waar de raaklijn horizontaal is.
e. Bereken de minimale baansnelheid in 2 decimalen.
f. Bereken de baanversnelling op t = 3

OPLOSSING 1

a. GR : mode > Func naar Par omzetten
GR : Y = > ziet nu anders uit (gebruik de x-knop om de T in te vullen)

b. $x = 0 \rightarrow \quad t^2 - 4 = 0$
$t = 2 \ \ v \ \ t = -2$

$t = 2 \quad \rightarrow y = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2 \qquad dus\ (0, 2)$
$t = -2 \ \rightarrow y = 3 \cdot -2 - (-2)^2 = -10 \qquad dus\ (0, -10)$

c. $\begin{cases} x'(t) = 2t \\ y'(t) = 3 - 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'(1) = 2 \\ y'(1) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$
$v = \sqrt{(x'(1))^2 + (y'(1))^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

d. Horizontale raaklijn : $y'(t) = 0$
$3 - 2t = 0$
$2t = 3$
$t = 1\frac{1}{2}$

Controleer of : $x'(t) \neq 0 \rightarrow x'\left(1\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot 1\frac{1}{2} = 3 \neq 0$

Dus alleen verticale raaklijn bij $t = 1\frac{1}{2}$

$x = (1\frac{1}{2})^2 - 4 = -2{,}75 \quad en \quad y = 3 \cdot 1\frac{1}{2} - \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$

e. Baansnelheid bij Krommen $v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(2t)^2 + (3-2t)^2}$

$Y_1 = \sqrt{(2t)^2 + (3-2t)^2}$
cal min geeft y = 2,12 dus de minimale snelheid is 2,12.

f. Baanversnelling : $a_b(t) = \frac{v \cdot a}{|v|}$

$v = \begin{cases} x'(t) = 2t \\ y'(t) = 3-2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'(3) = 6 \\ y'(3) = 3-6 = -3 \end{cases} \rightarrow v = \binom{6}{-3}$

$a = \begin{cases} x''(t) = 2 \\ y''(t) = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x''(3) = 2 \\ y''(3) = -2 \end{cases} \rightarrow a = \binom{2}{-2}$

$v \cdot a = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 \cdot 2 + \ -3 \cdot -2 = 12 + 6 = 18$

$|v| = \sqrt{(x'(3))^2 + (y'(3))^2} = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}$

Dus $a_b(t) = \dfrac{v \cdot a}{|v|} = \dfrac{18}{\sqrt{45}}$